TEOREM KOMPLETNOSTI U MODALNOJ LOGICI[1]

SAUL A. KRIPKE

Ovaj rad nastoji da navede i dokaže teorem kompletnosti za sistem S5 od [1], dopunjen kvantifikatorima prvog reda i znakom jednakosti. Pretpostavimo da posjedujemo prebrojivo beskonačnu listu pojedinačnih varijabli a, b, c,..., x, y, z,..., x_m, y_m, z_m,... kao i prebrojivo beskonačnu listu n-adičkih predikatnih varijabli P^n, Q^n, R^n,..., P_m^n, Q_m^n, R_m^n,...; ako je $n = 0$, onda se n-adička predikatna varijabla često naziva "iskazna varijabla". Formula $P^n(x_1,..., x_n)$ je n-adička primarna formula; često će superskript biti izostavljen ako takvo izostavljanje ne žrtvuje jasnoću. Usvajamo primitivne simbole $\wedge$, $\sim$, $\Box$, (x), $=$ koji predstavljaju konjunkciju, negaciju, nužnost, univerzalnu kvantifikaciju i identitet; uz pomoć ovih simbola i predikatnih varijabli definiramo pojam *dobro uređena formula*, ili jednostavno *formula* u uobičajenom smislu. Neka A, B, C itd. (sa ili bez supskripta ili akcenata) predstavljaju proizvoljne formule; ponekad ih pišemo kao $A(x_1,..., x_n)$ itd. da ukažemo na određene varijable. Ako je formula data kao $A(x)$, definiramo $A(y)$ na sledeći način: *prvo*, ako $A(x)$ sadrži bilo koji dio $(y)\ B(y)$ koji sadrži slobodnu varijablu x, zamijeniti varijablu x u tom dijelu sa varijablom z, gdje je z abecedno najranija varijabla koja se ne pojavljuje u $A(x)$. *Drugo, nakon što je učinjena prva zamjena*, zamijeniti sve primjere slobodne varijable x sa y. (Prema ovoj definiciji, $(x)\ A(x) \supset A(y)$ uvijek važi, bez ograničenja i supstitucija). Analogne definicije usvojene su kada postoji više varijabli. Definiramo A **v** B kao $\sim(\sim A \wedge \sim B)$, $A \supset B$ kao $\sim(\sim A \wedge \sim B)$, $\Diamond A$ kao $\sim \Box \sim A$, i $(\exists x)\ A(x)$ kao $\sim(x) \sim A(x)$. Za našu formalizaciju sa kvantifikatorima i znakom jednakosti u S5 uzimamo prvo bilo koju formalizaciju koja je adekvatna za klasični račun predikata prvog reda sa znakom jednakosti, recimo onaj Rosserov [2]

---

* Tekst "A Completeness Theorem in Modal Logic" preveden je iz *Journal of Symbolic Logic*, Volume 24, Number 1, March 1959.

[1] Zahvaljujem se recenzentu i profesoru H. B. Curryu za njihove korisne komentare o ovom radu i pažljivo čitanje. Moram izraziti dodatnu zahvalnost Curryju; bez njegovog stalnog poticanja na moje istraživanje objavljivanje ovih rezultati bi možda bilo odgođeno godinama.

(pp. 101 i 163-4). Dopunjavamo taj sistem sljedećim shemama aksioma i pravilima inferencije:[2]

A1: $\Box A \supset A$

A2: $\sim \Box A \supset \Box \sim \Box A$

A3: $\Box (A \supset B) \mathbin{.\supset.} \Box A \supset \Box B$

R1. Ako $\vdash A$ i $\vdash A \supset B$, $\vdash B$

R2. Ako $\vdash A$, $\vdash \Box A$

Dobijeni sistem zovemo S5 * =; ako se izostavi jednakost, zovemo ga S5 *, a ako su kvantifikatori i jednakost odbačeni, zovemo ga S5.

Za datu ne-praznu domenu **D** i formulu A definiramo *kompletno dodjeljivanje / pripadanje* A u **D** kao funkciju koja svakoj slobodnoj individualnoj varijabli u A dodjeljuje / doznačuje jedan element iz domene **D**, svakoj iskaznoj varijabli u A dodjeljuje / doznačava <istinosnu vrijednost> **T** ili **F**, i svakoj n-adičkoj predikatnoj varijabli u A dodjeljuje / doznačava skup uređenih n-torki članova domene **D**. Model <formule> A u <domeni> **D** definiramo kao uređeni par (**G**, **K**), gdje je **G** kompletno dodjeljivanje / pripadanje A u **D** i K je skup kompletnih dodjeljivanja / doznačavanja A u **D**, takav da **G** ϵ **K** i takav da se svaki član **K** slaže sa **G** u svojim dodjeljivanjima / doznačavanjima za slobodne individualne varijable u A (ali ne nužno u njegovim dodjeljivanjima za iskazne i predikatne varijable u A). Neka je **H** član **K** a B pod-formula od A; definiramo **H** dodjeljujući ili **T** ili **F** pod-formuli B induktivno, dakle: ako je B n-adička primarna formula $P\ (x_1,..., x_n)$, i ako je ψ skup uređenih n-torki dodijeljen / doznačen P, a mi elemente od D $\alpha_1,..., \alpha_n$ dodjeljujemo za $x_1,..., x_n$ (dodjeljivanje mora biti konzistentno sa **H**, ali ako je neka individualna varijabla x_n vezana u A i stoga joj nije dodijeljen element, mi pravimo proizvoljno dodjeljivanje), tada je <formuli> B dodijeljeno **T** ako $(\alpha_1,..., \alpha_n) \epsilon \psi$; inače, <formuli> B je dodijeljeno **F**. Iskaznim varijablama su već, prema hipotezi, dodijeljeni **T** ili **F** preko **H**. Ako B ima oblik $x = y$, dodijeljeno je **T** ako su x i y dodijeljeni isti element od **D**; inače je dodijeljeno **F**. $\sim B$ je pridruženo **T** (**F**) ako i samo ako je za B dodijeljeno **F** (**T**). $B \wedge C$ se dodjeljuje **T** ako je za oba B i C dodijeljeno **T**; inače je dodijeljeno **F**. $(x)\ B\ (x)$ je dodijeljeno **T** ako je za $B\ (x)$ dodijeljeno **T** za svako dodjeljivanje elementa **D** za x; u suprotnom se dodjeljuje **F**. $\Box\ B$ se dodjeljuje **T**

[2] Vidi Prior [6] i tamo navedene reference.

ako svaki član **K** dodjeljuje **T** za *B* (pod uvjetom da se svi članovi **K** u svojim dodjeljivanjima slažu sa svim slobodnim individualnim varijablama u *B*); inače je dodijeljeno **F**.

Za <formulu> *A* se kaže da je *validna* u modelu (**G**, **K**) *A* u <domeni> **D** ako i samo ako je za *A* dodijeljeno **T** zbog **G**. Za >formulu> *A* se kaže da je *validna* u >domeni> **D** ako i samo ako je >formula> *A* validna u svakom modelu >formule> *A* u <domeni> **D**. Za <formulu> *A* se kaže da je *zadovoljiva* u <domeni> **D** ako i samo ako postoji neki model <formule> *A* u <domeni> **D** u kojem je <formula> *A* validna. Za <formulu> *A* se kaže da je *univerzalno validna* ako i samo ako je *A* validna u svakom ne-praznom demenu.

Osnova neformalnih analiza koje motiviraju ove definicije je ta da je jedan iskaz (a proposition) nužan ako i samo ako je istinit u svim "mogućim svjetovima". (Za naše trenutne potrebe nije nužno da se dodatno analizira koncept "mogući svijet".) Uzmimo sada da je *A* jedna formula sa $P_1,..., P_m$ kao sa njenim iskaznim i predikatskim varijablama i sa $x_1,..., x_n$ kao sa njenim slobodnim individualnim varijablama. Ako interpretiramo svaku slobodnu individualnu varijablu da označava neki pojedinačni objekat i da svaka iskazna ili predikatska varijabla označava jedan pojedinačni iskaz ili predikat, tada *A* postaje jedan "iskaz" u uobičajenom smislu riječi. S ekstenzionalnog stanovišta, jedan adekvatan semantički dvojnik za ovu interpretaciju je dat konceptom kompletnog pridruživanja za <formulu> *A* u domeni **D**. U modalnoj logici, dakle, želimo da znamo ne samo o realnom svijetu nego o drugim mogućim svjetovima; *P* može biti istinito u realnom svijetu ali lažno u nekom svijetu koji se može zamisliti, a slično tome važi i za $P(x_1,..., x_n)$. Tako nas ne vodi samo jedno pridruživanje, već skup pridruživanja **K**, od kojih svi osim jednog predstavljaju svjetove koji su zamislivi, ali ne i stvarni; pridruživanje koje predstavlja stvarni svijet je izdvojeno kao **G**, a za par (**G**, **K**) se kaže da formira model <formule> *A*. Nadalje, pošto $x_1,..., x_n$ predstavljaju individualne objekte koji ostaju isti u svim svjetovima, pretpostavljamo da se svi članovi K u svojim pridruživanjima slažu s individualnim varijablama. Jasno je da sva pravila za pridruživanje **T** ili **F** formulama postaju validna kada se interpretiraju kao da predstavljaju procjenu iskaza koji korespondira toj formuli kao istinitog ili lažnog u datom "svijetu", bilo stvarnom ili mogućem. Konkretno, iskaz $\Box B$ se ocjenjuje kao istinit kada i samo kada B važi u svim zamislivim svjetovima. Za iskaz se može reći da je istinit ako važi u stvarnom svijetu; ova ideja vodi do naše definicije validnosti u modelu. Pokušavajući da konstruišemo definiciju univerzalne logičke validnosti, čini se vjerodostojnim pretpostaviti ne samo da univerzum diskursa može da sadrži proizvoljan broj elemenata i da predikati mogu biti dodijeljeni bilo kojim datim interpretacijama u stvarnom svijetu, ali i da bilo koja kombinacija mogućih svjetova može biti povezana sa stvarnim svijetom s obzirom na neku grupu predikata. Drugim riječima, moguće je pretpostaviti da se na <domeni> **D**, **G** i **K** ne smiju postavljati daljnja ograničenja, osim standardnog da <domena> **D** nije prazna. Ova pretpostavka vodi direktno do naše definicije univerzalne validnosti.

Važno je napomenuti da se teoremi ovog rada mogu formalizirati u metajeziku (kao što je Zermelova teorija skupova) koji je "ekstenzionalan", kako u smislu posjedovanja aksioma teorije skupova o ekstenzionalnosti, tako i u smislu postuliranja nijedne druge stvarne veze osim istinosnih funkcija. Tako se vidi da je bar određeni ne-trivijalan dio semantičkog modaliteta dostupan ekstenzionalnom logičaru.

Sada ćemo se okrenuti našem dokazu kompletnosti. Mi ga zasnivamo na konceptu semantičkih tabela koje je uveo Beth [4]. Sadašnje tretiranje je samodostatno, mada poznavanje Bethovog rada može olakšati razumijevanje.

Kažemo da je formula B *semantički obuhvaćena* formulama $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ako i samo ako je $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n \,.\supset.\, B$ univerzalno validno; ako je $n = 0$, ovaj pojam se poklapa sa konceptom univerzalne validnosti B.

Semantička tabela je sredstvo za testiranje da li je ili nije neka formula semantički obuhvaćena drugim datim formulama. Jasno je da je nužan i dovoljan uslov da ako $A_l, \ldots, A_n$ ne treba da obuhvaća B, da bi trebalo da postoji model u kome su $A_l, \ldots, A_n$ validni a B nije. Ovu situaciju predstavljamo stavljajući $A_1, \ldots, A_n$ u lijevu kolonu tabele a B u desnu kolonu. Razne druge tabele će biti predstavljene kasnije kao rezultat pravila Yr datog ispod; ove tabele se nazivaju *pomoćnim tabelama*, dok je tabela koja je prvobitno predstavljena *glavna* tabela. Dakle, uopšteno govoreći, ne radi se samo o jednoj tabeli, nego o setu tabela od kojih je jedan član izdvojen kao glavna tabela. Zaista, kao što će se vidjeti iz pravila $\wedge$r ispod, konstrukcija može uvesti sistem takvih skupova, pri čemu se svaki skup sistema naziva "alternativni skup". S obzirom na to, glavni prikaz s $A_1, ..., A_n$ u lijevoj koloni i B u desnoj koloni nastavljamo sa konstrukcijom po sljedećim pravilima (koja se odnose na bilo koju tablu seta, glavnog ili pomoćnog):[3]

Nl. Ako se $\sim A$ pojavljuje u lijevoj kolumni tabele, stavi A u desnu kolumnu te tabele.

Nr. Ako se $\sim A$ pojavljuje u desnoj kolumni tabele, staviti A u lijevu kolumnu te tabele.

$\wedge$*l*. Ako se $A \wedge B$ pojavljuju u lijevoj kolumni tabele, staviti oboje A i B u lijevu kolumnu te tabele.

$\wedge$*r*. Ako se $A \wedge B$ pojavljuju u desnoj kolumni tabele, postoje dvije alternative – ili staviti A u desnu kolumnu ili staviti B u desnu kolumnu. U tom slučaju kažemo da je tabela razdvojena na dvije alternativne tabele. U razdvajanju tabela glavna tabela je skup tabela, dobijene alternativne tabele su glavne tabele dva alternativna skupa; u protivnom to su pomoćne tabele altrernativnih skupova

Π*l*. Ako se $(x)\ A\ (x)$ pojavljuje u lijevoj kolumni tabele, a ako je a varijabla koja se javlja kao slobodna u svakoj kolumni bilo koje tabele tog skupa, onda staviti $A\ (a)$ u lijevu kolumnu iste tabele koja sadrži $(x)\ A\ (x)$ u njenoj lijevoj kolumni.

Π*r*. Ako se $(x)\ A\ (x)$ pojavljuje u desnoj kolumni tabele, onda uvodimo jednu varijablu a koja se još nije pojavljivala u bilo kojoj tabeli tog skupa, i stavljamo $A\ (a)$ u desnu kolumnu iste tabele koja sadrži $(x)\ A\ (x)$ na desnoj strani.

Il. Ako se $a = b$ (za neke varijable a i b) pojavljuju u lijevoj kolumni neke tabele, onda u obje kolumne svake tabele tog skupa zamjenjujemo svaku formulu $A\ (a, b)$ formulom $A\ (b, b)$.

Ir. Nema pravila.

Yl. Ako se $\Box A$ pojavljuje u lijevoj kolumni neke tabele, onda stavljamo A u lijevu kolumnu svake tabele tog skupa.

[3] Nazivi ovih pravila sugerirani su nazivima za inferencijalna pravila kod Curreya [6].

Yr. Ako se $\Box A$ pojavljuje u desnoj kolumni neke tabele, onda uvodimo novu pomoćnu tabelu koja započinje stavljanjem A u njenu desnu kolumnu.

Pored ovih pravila za konstrukciju semantičkih tabela dodajemo da, ako se ne pojavi slobodna varijabla i nijedna se ne uvodi pod Πr, tada uvodimo slobodnu varijablu tako da se Πl može primijeniti.

Za tabelu se kaže da je zatvorena ako i samo ako se formula pojavljuje u oba njena stupca ili $a = a$, za neku varijablu a, koja se pojavljuje u desnoj koloni. Skup tabela je zatvoren kada i samo kada je najmanje jedan od njegovih članova (glavni ili pomoćni) zatvoren. Zbog Λr, konstrukcija koja počinje sa $A_1,\ldots, A_n$ u lijevoj koloni i B u desnoj koloni može se podijeliti na alternativne skupove; u ovom slučaju kažemo da je konstrukcija zatvorena ako i samo ako su svi njeni alternativni skupovi zatvoreni.

TEOREM 1. B je semantički obuhvaćena <formula> sa $A_1,\ldots, A_n$ ako i samo ako je konstrukcija koja počinje sa $A_1,\ldots, A_n$ u lijevoj koloni i sa B u desnoj koloni zatvorena.

DOKAZ. Teorem slijedi iz slijedeće dvije leme.

LEMA 1. Ako konstrukcija počinje sa $A_1,\ldots, A_n$ na lijevoj strani a B je na desnoj zatvoren, tada je B semantički obuhvaćena <formula> sa $A_1,\ldots, A_n$.

DOKAZ. Pretpostavimo za *reductio ad absurdum* da B nije semantički vezan za $A_1,\ldots, A_n$. Onda postoji ne-prazna domena **D** i model (**G**, **K**) od $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n . \supset . B$ (ili od B, ako je $n = 0$) u **D** tako da $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n . \supset . B$ (ili od B) ne vrijedi u (**G**, **K**). Pokazat ćemo da je svaka tvrdnja na lijevoj (desnoj) strani glavne tabele konstrukcije koja počinje s $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n$ na lijevoj i B na desnoj je pridruženo **T** (**F**) zbog **G**. Nadalje, pokazat ćemo da svaka pomoćna tabla odgovara na isti način nekom članu K.

Pošto $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n . \supset . B$ (ili od B) ne vrijedi u (**G**, **K**), pridruženo mu je **F** zbog **G**. Pravilima vrednovanja za "$\wedge$" i "$\sim$" i definiciju "$\supset$", $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n$ su za sve dodijeljeni **T** i B je dodijeljeno **F** zbog **G**. Prema pravilima ocjenjivanja za $\sim$, ako je $\sim C$ dodijeljeno **T**, C mora biti dodijeljeno **F**; ova činjenica potvrđuje N*l*. Slično tome, možemo potvrditi N*r* i Λl. Ako je $C \wedge D$ dodijeljeno **F**, onda ili C ili D mora biti dodijeljeno **F**; Λr nam stoga ispravno upućuje da razmotrimo ove dvije alternativne mogućnosti. Ako je (x)

$A\ (x)$ dodijeljeno **T**, svakom elementu domene **D** mora biti dodijeljeno **T**; stoga je Πl validno. Ako je $(x)\ A\ (x)$ dodijeljeno **F**, onda postoji član a od **D** takav da je $A\ (a)$ dodijeljeno **F**; stoga je Πr validno. Ako je $a = b$ je dodijeljeno **T**, onda je a i b dodijeljen isti član od **D**; stoga je supstitucija opisana u *Il* validna. Ako je $\Box A$ dodijeljeno **T**, onda svaki član **K** dodjeljuje **T** za A; stoga je Υl validno. Ako je $\Box A$ dodijeljeno **F**, postoji član od **K** koji dodjeljuje **F** za A; stoga je Υr opravdano. Konačno, naša odredba da treba uvesti barem jednu slobodnu varijablu odgovara ograničenju da <domena> **D** nije prazna.

Budući da je konstrukcija zatvorena, svaki alternativni skup sadrži tabelu koja ili ima formulu u oba stupca ili ima $a = a$ u desnoj. To, međutim, znači da neki član iz **K** mora ili dodijeliti i **T** i **F** nekoj formuli ili mora dodijeliti **F** za $a = a$. Pošto naša pravila procjene čine obje ove alternative nemogućim, slijedi da domena **D** i model (**G**, **K**) ne mogu postojati. Q.E.D.

LEMA 2. Ako konstrukcija počinje s $A_1,\dots, A_n$ na lijevoj i B na desnoj strani nije zatvoren, tada B nije semantički obuhvaćeno s $A_1,\dots, A_n$.

DOKAZ. Budući da konstrukcija nije zatvorena, postoji skup tabela, jedan od alternativnih skupova konstrukcije koji nije zatvoren. Mi ćemo odabrati takav skup i zanemariti sve druge alternativne skupove. Neka je **D** skup svih slobodnih varijabli koje se pojavljuju u našem skupu tabela (i ne eliminira se primjenom *Il*). Za svaku tabelu u skupu definiramo dodjeljivanje za $A_1 \wedge ,\dots, A_n\ .\supset .\ B$ kako slijedi: svaka slobodna varijabla koja nije eliminirana od <pravila> I*l*, dodijeljena je samoj sebi; slobodnoj varijabli eliminiranoj sa <pravilom> I*l* dodjeljuje se varijabla koja je zamjenjuje. Iskaznoj varijabli je dodijeljeno **T** ako se pojavljuje s lijeve strane u tabeli; inače joj je dodijeljeno **F**. Predikatskoj varijabli P^{n} se dodjeljuje skup svih uređenih n-torki $(x_1,\dots, x_n)$ tako da se $P^{\text{n}}\ (x_1,\dots, x_n)$ pojavljuje na lijevoj strani tabele. Sada imamo skup **K** kompletnih dodjeljivanja koji odgovaraju našem skupu tabela; ako je **G** dodjeljivanje koje odgovara glavnoj tabeli skupa, onda je (**G**, **K**) model $A_1 \wedge ,\dots, A_n\ .\supset .\ B$ u **D**.

Pokazat ćemo sada pomoću indukcije na broju simbola C da je bilo kojoj formuli C koja se pojavljuje na lijevoj (desnoj) strani tabele dodijeljeno **T**(**F**) odgovarajućom funkcijom dodjeljivanja. Jasno je da je to istinito za osnovne formule (uključujući iskazne varijable) koje se pojavljuju na lijevoj strani. Ako se dogode na desnoj strani, budući da tabela nije zatvorena, ne mogu se pojaviti na lijevoj strani; stoga su im dodijeljeni **F**. Ako se pojavi formula jednakosti $a = b$ na lijevoj strani, onda prema <pravilu> I*l*, ona se zamjenjuje s $b = b$; ovoj posljednjoj formuli mora biti dodijeljeno **T**. Ako se $a = b$ pojavljuje desno, budući da tabela nije zatvorena, a i b moraju biti različite varijable koje ostaju odvojene nakon svih zamjena prema <pravilu> I*l*. Stoga, prema danom dodjeljivanju za slobodne varijable, a i b su dodijeljeni različitim objektima, a $a = b$ je dodijeljeno **F**. Ako se $\sim C$ pojavi na lijevoj strani, prema <pravilu> N*l* C se pojavljuje na desnoj strani; prema tome, hipotezom o indukciji, C je dodijeljeno **F**. Našim pravilima procjenjivanja, $\sim C$ je dodijeljeno **T**. Slično tome, možemo tretirati slučajeve gdje se $\sim C$ pojavljuje na desnoj strani ili $C_1 \wedge C_2$ ili $(x)\ C\ (x)$ pojavljuje se na obje strane. Ako se $\Box C$ pojavljuje na lijevoj strani, pomoću <pravila> Y*l* C se pojavljuje u lijevom stupcu svake tabele tog skupa; dakle, hipotezom indukcije, C je dodijeljeno **T** svakim članom **K**. Stoga, prema našim pravilima procjenjivanja, $\Box$ C je dodijeljeno **T**. Konačno, ako se desi $\Box$ C na desnoj strani, prema <pravilu< Y*r* C se pojavljuje desno u nekoj tabeli tog skupa; prema tome, hipotezom o indukciji, C je dodijeljeno **F** nekim članom u **K**. Dakle, prema našim pravilima procjene, $\Box$ C je dodijeljeno **F**.

Pošto se A_1 ,..., A_n pojavljuje u lijevoj koloni glavne tabele, njima se dodjeljuje **T** po **G**; na sličan način **G** dodjeljuje **F** za B. Prema našim pravilima procjene, **G** dodjeljuje **F** za $A_1 \wedge ,..., A_n\ .\supset .\ B$; stoga $A_1 \wedge ,..., A_n$ T $.\supset.\ B$ nije validno u (**G**, **K**). Prema tome, B nije semantički obuhvaćeno sa A_1 ,..., A_n. Q.E.D.

TEOREM 2. Ako je formula zadovoljiva u ne-praznom domenu, ona je validna u modelu (**G**, **K**) u domeni **D**, gdje su **D** i **K** oboje, konačni ili prebrojivi. Ako je formula validna u svakom konačnom (ne-praznom) ili prebrojivom domenu, ona je univerzalno validna.

DOKAZ. Druga rečenica teorema lako slijedi iz prve. Ako je formula B zadovoljiva u nekom ne-praznom domenu, $\sim B$ nije univerzalno validna; dakle, prema Teoremu 1, konstrukcija započeta stavljanjem $\sim B$ u desnu kolonu nije zatvorena. Stoga dokaz Leme 2 konstruira određeni domen **D** i model (**G**, **K**) u kojem $\sim B$ nije validan, tj. koji je validan. Jasno je, međutim, da su **D** i **K** oboje, konačni ili da se mogu brojiti, kao što se može vidjeti iz pravila po kojima se konstruiraju tabele.

TEOREM 3. Ako se formula koja ne sadrži znak jednakosti može zadovoljiti u nekom ne-praznom domenu, ona vrijedi u modelu (**G**, **K**) u domeni **D**, gdje je **K** konačan ili prebrojiv i **D** je prebrojiv. Dalje, ako je validna u svakom prebrojivom domenu, onda je univerzalno validna.

DOKAZ. Ovaj teorem lako slijedi iz Teorema 2 i sljedeće leme:

LEMA 3. Ako formula *A* koja ne sadrži znak jednakosti vrijedi u modelu (**G**, **K**) u ne-praznom domenu **D**, a **D** je podskup od **D′**, tada je *A* validna u modelu (**G′**, **K′**) u **D′**, gdje su **K** i **K′** jednako brojni.

DOKAZ. Pošto je **D** ne-prazan, neka je *a* element **D**. Za svako dodjeljivanje **H** ϵ **K** definiramo **H′**, neko dakle dodjeljivanje za *A* u **D′**. Za sve slobodne individualne varijable i iskazne varijable, **H′** čini ista dodjeljivanja kao **H**. Ako **H** dodjeljuje predikatnoj varijabli P^{n} skup S uređenih *n*-torki elemenata **D**, **H′** dodjeljuje P^{n} skup S′ koji sadrži sve *n*-torke od S, plus sve *n*-torke dobivene zamjenom *a* u nekim svojim pojavljivanjima bilo kojim elementima sadržanim u **D′**, ali ne u **D**. **K′** se zatim dobija iz **K** zamjenom svakog **H** ϵ **K** sa **H′**. Sada je lako dokazati da je *A* validno u (**G′**, **K′**).

TEOREM 4. Ako u teoremima 2 i 3 dotična formula ne sadrži "□", tada se može odrediti da je **K** jedinični skup **G**.

DOKAZ. To se lako može dokazati analizom konstrukcije **K** u teoremima 2 i 3.

Jasno je da su teoremi 2 i 3 modalne analogije Léwenheim-Skolemova teorema. Teorem 4 navodi (otprilike) da ako modalitet nije prisutan, može se dobiti uobičajeni oblik Léwenheim-Skolemova teorema. Nadalje, možemo proširiti naše verzije Léwenheim-Skolemova teorema na zajedničko zadovoljavanje beskonačno mnogo formula ako dopustimo da konstrukcija započne stavljanjem beskonačno mnogo formula u bilo koji ili u oba stupca.

Iako, kao što je Beth pokazala u [4], konstrukcija tabele može trajati neograničeno, te se stoga može zamisliti beskonačno mnogo varijabli, formula i tabela, jednako je jasno da, ako počnemo konstrukciju s konačnim brojem formula u oba stupca glavne tabele, nakon bilo kojeg konačnog broja primjena pravila, uvedene su samo konačne formule, varijable i tabele. Fazu u kojoj A_1 ,..., A_n se nalaze u lijevom stupcu, a B u desnom stupcu nazivamo početna faza konstrukcije; faza u kojoj se primjenjuje mth pravilo je m + l stadij.

Karakterističnu formulu dane tablice definiramo u određenoj fazi kao $A_1 \wedge ... A_m \wedge \sim B_1 \wedge ... \sim B_n$, gdje A_1,..., A_m (B_1,..., B_n) su formule pronađene na lijevoj (desnoj) strani stola u ovoj fazi. Zatim definiramo karakterističnu formulu bilo kojeg od alternativnih skupova u određenoj fazi kao $(\exists a_1)$ $(\exists a_2)$ ... $(\exists a_p)(A\wedge\Diamond B_1\wedge...\Diamond B_q)$, gdje je A karakteristična formula glavne tabele tok skupa, B_1 ... B_q su karakteristične formule pomoćnih tabela skupa i a_1,..., a_v su slobodne varijable $A \wedge \Diamond B_1 \wedge ..., \Diamond B_q$. Konačno definiramo karakterističnu formulu stupnja kao D_1 **v** ..., D_x, gdje D_1,..., D_x su karakteristične formule alternativnih skupova tabele. Jasno je da je karakteristična formula početnog stupnja $(\exists a_1)(\exists a_2)$ ... $(\exists a_p)$ $(A_1 \wedge ... A_y \wedge \sim B)$, gdje su A_1,..., A_y formule koje se stavljaju na lijevo i B je formula desno; ako je $y = 0$, karakteristična formula je jednostavno $(\exists a_1)$ ... $(\exists a_p) \sim B$.

LEMA 4. Ako je A karakteristična formula početne faze konstrukcije, a B je karakteristična formula bilo koje faze konstrukcije, onda $\vdash A \supset B$ u S5 * =.

DOKAZ. Pokazat ćemo da karakteristična formula n-te faze konstrukcije implicira karakterističnu formulu n + 1 stupnja. Iz ove činjenice naša lema slijedi lako, koristeći tranzitivnost implikacija. Neka je A, dakle, karakteristična formula faze i B je karakteristična formula sljedeće faze; moramo pokazati da $\vdash A \supset B$ u S5 * =. U principu, A će biti alternacija A_1 **v** ... A_m, koja predstavlja nekoliko alternativnih skupova. Pravilo kojim se B dobija iz A utječe samo na jedan od ovih alternativnih skupova; tj. promijenit će A_x $(1 \leq x \leq m)$ u $A_{x'}$ i ostale komponente će ostati nepromijenjene. Budući da je $\vdash A_x \supset A_{x'} : \supset: A_1$ **v** ... $A_{x'}$ **v** ... A_m validno u S5, dovoljno je pokazati da je $\vdash A_x \supset A_{x'}$, i tako ignorirati druge alternativne skupove. Ako A_x je $(\exists a_1)$ ... $(\exists a_p)$ B i ako $A_{x'}$ je $(\exists a_1)$ ... $(\exists a_n)$ B', jasno je da je dovoljno pokazati $\vdash B \supset B'$ da bi se pokazalo $\vdash A_x \supset A_{x'}$.. Pošto se sva pravila, osim Il, Y1 i Yr, odnose se samo na jednu tabelu skupa, dovoljno je u svim slučajevima, osim u ova tri, da se razmotri samo karakteristična formula ove tabele i ignorira ostatak skupa. Neka pravilo koje se razmatra transformira tabelu sa karakterističnom formulom C u jednu sa karakterističnom formulom C'. Ako je tabela pomoćna, mi zapravo trebamo dokazati $\vdash \Diamond C \supset \Diamond C'$, ali ovo može doći iz $\vdash C \supset C'$ primjenom R2, $\vdash \Box (C \supset C'). \supset . \Diamond C \supset$ ⍰ C', i primjenom R1. Neka C bude $D_1 \wedge .... D_y \wedge ... D_p$, općenito pravilo će djelovati na jednoj formula D_y ($1 \leq y \leq p$) kako bi se promijenila $D_1 \wedge ... D_{y \wedge} ... D_p$ ($= C$) u $D_1 \wedge ... D_y \wedge ... D_p \wedge E$ ($= C'$). Jasno, da bi se dokazalo $\vdash D_1 \wedge ... D_y \wedge ... D_p . \supset . D_1 \wedge ... D_y \wedge ... D_p \wedge E$ je dovoljno dokazati $\vdash D_y \supset E$. Imajući u vidu ove preliminarne napomene, razmotrit ćemo sljedeće slučajeve:

Slučaj Nl. Ovaj slučaj je opravdan zbog $\vdash \sim A \supset \sim A$.

Slučaj Nr, opravdan zbog $\vdash \sim\sim A \supset A$

Slučaj Λ*l*, opravdan zbog $\vdash A \wedge B . \supset . A \wedge B$.

Slučaj Λ*r*. Neka je karakteristična formula skupa na koji se Λ*r* primjenjuje ili $(\exists a_1) ... (\exists a_p) (C \wedge \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B)))$ ili $(\exists a_1) ... (\exists a_p) (C \wedge D \wedge \sim (A \wedge B))$, gdje je $A \wedge B$ formula na koju se primjenjuje Λ*r*; prva formula je primjenjiva ako se Λ*r* primijeni na pomoćnu tabelu, a druga ako se Λ*r* primijeni na glavnu tablu. Pretpostavimo da je karakteristična formula kao u prvom slučaju: Tada imamo $\vdash D \wedge \sim (A \wedge B) \mathbf{:\supset:} D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A$. **v** . $D \wedge \sim A (A \wedge B) \wedge \sim B$. Stoga imamo $\vdash \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B))$ $\mathbf{:\supset:} \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A$. **v**. $D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim B)$. Prema dobro poznatom teoremu S5, imamo $\vdash \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A$.**v**. $D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim B) \mathbf{.\supset.} \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A)$ **v** $\Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim B)$; stoga imamo $\vdash \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \mathbf{.\supset.} \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A)$ **v** $\Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim B)$. Iz toga dobijamo $\vdash C \wedge \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B)) : \supset : C . \wedge . \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A)$ **v** $\Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim B)$; budući da $\vdash C . \wedge . \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A)$ **v** $\Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim B) \mathbf{:\supset:} C \wedge \Diamond (D \wedge \sim (A \wedge B) \wedge \sim A)$ **. v.** $C \wedge \Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim B)$, dobijamo $\vdash C \wedge \Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B)) : \supset : C \wedge \Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim A) . \wedge . C \wedge \Diamond (D \wedge \sim(A \wedge B) \wedge \sim B)$. Postavljanjem egzistencijalnih kvantifikatora imamo željeni rezultat. Slično za drugi slučaj.

Slučaj Π*l*. Opravdano sa $\vdash (x) A (x) \supset A (a)$.

Slučaj Π*r*. Neka je karakteristična formula skupa na koji primjenjujemo Πr bude $(\exists a_1) ... (\exists a_p) (D \wedge \Diamond (E \wedge \sim (x) A (x)))$ ili $(\exists a_1) ... (\exists a_p) (D \wedge E \wedge \sim (x) A (x))$. Razmotrit ćemo samo prvi slučaj. Neka je b varijabla koja se ne pojavljuje u D, E ili $(x) A (x)$. Imamo $\vdash E \wedge \sim (x) A (x). \supset. (\exists b) (E \wedge \sim (x) A (x) \wedge$

$\sim A(b)$). Iz toga dobivamo $\vdash \Diamond (E \wedge \sim (x) A(x)). \supset. \Diamond (\exists b) (E \wedge \sim (x) A(x) \wedge \sim A(b))$. Prema teoremu Priora [6], imamo u S5* $\vdash \Diamond (\exists b) (E \wedge \sim (x) A(x) \wedge \sim A(b)) . \supset . (\exists b) \Diamond (E \wedge \sim (D \wedge \Diamond (E \wedge \sim (x) A(x) \sim A(b)$. Iz toga slijedi da je $\vdash \Diamond (E \wedge \sim (x) A(x) \supset (\exists b) \Diamond (E \wedge \sim (x) A(x) \wedge \sim A(b)$. Iz toga se lako dobiva $\vdash (\exists a_1) \ldots (\exists a_p) (D \wedge \Diamond (E \wedge \sim (x) A(x))) . \supset. (\exists a_1) \ldots (\exists a_p) (\exists b) (D \wedge \Diamond (E \wedge \sim (x) A(x)))$.

Slučaj Il. Karakteristična formula skupa je $(\exists a_1) \ldots (\exists a_x) \ldots (\exists a_y) \ldots (\exists a_p) (D \wedge \Diamond (E \wedge a_x = a_y)$ ili $(\exists a_1) \ldots (\exists a_x) \ldots (\exists a_y) \ldots (\exists a_p) (D \wedge E \wedge a_x = a_y)$; razmatramo samo prvi slučaj. Jasno je da ako je $\vdash \Diamond (E \wedge a_x = a_y) \supset \Diamond (a_x = a_y)$. Prema Quineovom teoremu [5], str. 80, formula (52), imamo $\vdash a_x = a_y \supset \Box (a_x = a_y)$; dakle, prema Priorovom teoremu [6], odjeljak 3, imamo $\vdash \Diamond (a_x = a_y) \supset a_x = a_y$ i stoga $\vdash \Diamond (E \wedge a_x = a_y) \supset a_x = a_y$. Iz ovoga lako dobijamo $\vdash (\exists a_1) \ldots (\exists a_x) \ldots (\exists a_y) \ldots (\exists a_p) (D \wedge E \wedge a_x = a_y) \mathbf{.} \supset\mathbf{.} (\exists a_1) \ldots (\exists a_x) \ldots (\exists a_y) \ldots (\exists a_p) (a_x = a_y \wedge D \wedge \Diamond (E \wedge a_x = a_y)$. Budući da imamo $\vdash (\exists a_1) \ldots (\exists a_x) \ldots (\exists a_y) \ldots (\exists a_p) (a_x = a_y \wedge D \wedge \Diamond (E \wedge a_x = a_y)) \mathbf{.\supset.} (\exists a_1) \ldots (\exists a_x) \ldots (\exists a_y) \ldots. (\exists a_p) E'$ gdje je E' rezultat zamjene a_x sa a_y (nakon što su napravljene sve potrebne promjene u vezanim varijablama) u $D \wedge \Diamond (E \wedge a_x = a_y)$, naš rezultat je dokazan.

Slučaj Yl. Neka karakteristična formula skupa bude $(\exists a_1) \ldots (\exists a_p) (D \wedge \Diamond (E \wedge \Box A))$ ili $(\exists a_1) \ldots (\exists a_p) (D \wedge E \wedge \Box A)$; kao i obično, razmotrit ćemo samo prvi slučaj. Imamo $\vdash \Diamond (E \wedge \Box A) \supset \Diamond \Box A$; a budući da je u S5 $\vdash \Diamond \Box A \supset \Box A$, $\vdash \Diamond (E \wedge \Box A) \supset \Box A$. Nadalje, imamo $\vdash \Box A \mathbf{:\supset:} C \mathbf{.\supset.} A \wedge C$; to opravdava stavljanje C u lijevi stupac bilo koje glavne tablice. Slično $\vdash \Box A .\supset. \Diamond C \supset \Diamond (C \wedge A)$ opravdava stavljanje A u lijevi stupac pomoćne tabele.

Slučaj Yr. Neka je karakteristična formula skupa na koji se primjenjuje Yr $(\exists a_1) \ldots (\exists a_p) (D \wedge \Diamond (E \wedge \sim\Box A))$ ili $(\exists a_1) \ldots (\exists a_p) (D \wedge E \wedge \sim\Box A)$; kao i obično, razmotrit ćemo samo prvi slučaj. Imamo $\vdash \Diamond (E \wedge \sim\Box A) \supset \Diamond \sim \Box A$; nadalje, budući da u S5 imamo $\vdash \Diamond \sim \Box A \supset \Diamond \sim A$, onda imamo $\vdash D \wedge \Diamond (E \wedge \sim\Box A) . \supset D \wedge \Diamond (E \wedge \sim\Box A) \wedge \Diamond \sim A$. Ali $\Diamond \sim A$ je karakteristična formula nove tablice koju je uveo Yr; stoga slijedi naš rezultat, pridajući egzistencijalne kvantifikatore. Q.E.D.

TEOREM 5. Ako je A univerzalno validna <formula>, onda je $\vdash A$ u S5 * =.

DOKAZ. Pošto je A univerzalno validna <formula>, po Teoremu 1 konstrukcija tabele koja počinje sa A u desnoj koloni je zatvorena. Neka je B karakteristična formula najranije faze u kojoj je zatvaranje dokazivo (tj. najranija faza u kojoj svaki alternativni skup sadrži tabelu ili s formulom u oba stupca ili formulom $a = a$ na desnoj strani). Onda prema Lemi 4, $\vdash (\exists a_1) \dots (\exists a_p) \sim A$, a time i na kraju $\vdash A$, slijedi lako. Općenito, B će biti u obliku C_1 **v** ... C_n, gdje $C_{x'}$ s predstavlja alternativne skupove; da bi se dokazalo $\vdash \sim B$ dovoljno je dokazati $\vdash C_x$ za svaki x, $1 \leq x \leq n$. Opet, C_x ima oblik $D_0 \wedge \Diamond D_1 \wedge \dots \Diamond D_m$; pošto je skup zatvoren, postoji tabela skupa, predstavljena sa D_y $(0 \leq y \leq m)$, koja je zatvorena. Budući da, koristeći R2, $\vdash \sim D_y$ implicira $\vdash \sim \Diamond D$, očigledno je dovoljno dokazati $\vdash \sim D_y$ da bismo dobili $\vdash \sim C_x$. Definicijama zatvaranja i karakterističnom formulom, budući da je tabela koja odgovara D zatvorena, D_y mora sadržavati ili dva konjunkcijska termina E i $\sim E$ ili konjunkcijski izraz $\sim a = a$. Bilo koji slučaj je dovoljan da se dokaže $\vdash \sim D_y$. Q.E.D.

Teorem 5 je naš teorem kompletnosti za sistem S5 * =; ako je jednakost (jednakost i kvantifikacija) ispuštena, dokazi iz Leme 4 i Teorem 5 još uvijek postoje za S5* (S5). Kombinujući teoreme 2, 3 i 5, dobijamo sljedeće korolarije:

KOROLARIJ 1. Ako je formula A u S5 * = validna u svakom konačnom (ne-praznom) ili prebrojivom domenu, onda je $\vdash A$ u S5 * =.

KOROLARIJ 2. Ako je formula A u S5* validna u svakoj prebrojivoj domeni (ili izomorfizmom jednakobrojnih domena, u jednoj prebrojivoj domeni), onda je $\vdash A$ u S5 *.

Sada ćemo dokazati teorem konzistentnosti za S5 * =, suprotno od našeg Teorema 5.

TEOREM 6. Ako je $\vdash A$ u S5 * =, A je univerzalno validna <formula>.

DOKAZ. Konstrukcija odgovarajućih semantičkih tabela će potvrditi da je svaki aksiom od S5 * = univerzalno validan. Pravila ocjenjivanja za "$\supset$" su dovoljna da pokažu da ako su A i $A \supset B$ univerzalno validni, onda je i B; to potvrđuje R1. Ako je A univerzalno validna <formula>, po Teoremu 1 konstrukcija tabele počinje sa A na desnoj, eventualno zatvorenoj strani. Ako započnemo konstrukciju sa $\Box A$ na desnoj strani, Yr nam nalaže da stavimo A na desno u novoj tabeli. Kako se ova konstrukcija zatvara, tako i konstrukcija koja počinje sa $\Box A$ na desnoj strani; stoga, prema Teoremu 1, $\Box A$ je univerzalno validna <formula>. Ovo potvrđuje R2 za univerzalnu validnost.

TEOREM 7. $\vdash A$ u S5 * = ako i samo ako je A univerzalno validna <formula>.
Za iskazni račun uobičajeno je odrediti univerzalnu validnost pomoću tabele istinosne vrijednosti. Iako semantičke tabele već daju prikladnu proceduru odlučivanja za S5, bit će poučno konstruirati analogne tablice istinosne vrijednosti za S5. Obična klasična tabela istinosne vrijednosti skup je mogućih procjena iskaznih varijabli; svaki skup moguće procjene za svaku iskaznu varijablu određuje se redom tablice. Zatim evaluiramo formulu koristeći uobičajena pravila. Za S5 tablice istinosne vrijednosti usvojit ćemo sličnu definiciju, osim što u bilo kojoj tablici neki (ali ne svi) redovi mogu biti izostavljeni. Tako formula ima mnogo tabela istinosne vrijednosti, ovisno o tome koliko je redaka izostavljeno. Procjenjujemo "$\wedge$" i "$\sim$" prema uobičajenim metodama. U bilo kojoj tablici istinosne vrijednosti $\Box A$ je dodijeljeno **T** u svakom retku ako je A dodijeljen **T** u svakom redu; u suprotnom, $\Box A$ je dodijeljeno **F** u svakom retku. Formula B je tautologija u S5 ako i samo ako je dodijeljeno **T** u svakom retku svake njezine tablice. Jasno je da tabela istinosne vrijednosti za B odgovara skupu **K** dodjeljivanja za B, budući da prema hipotezi B sadrži samo iskazne varijable kojim treba dodijeliti **T** ili **F**. Ako odaberemo neki posebni red tablice kao njegov određeni red i dopustimo da odgovarajuće dodjeljivanje bude **G**, dobijemo model (**G**, **K**) za B. (U iskaznom računu referiranje na domenu **D** je nepotrebno.) Koristeći ova zapažanja lako je dokazati da se za formule u S5 naš pojam tautologije podudara sa našim pojmom univerzalne validnosti.
TEOREM 8. $\vdash A$ u S5 ako i samo ako je A tautologija u S5.
DOKAZ. Pokazati ekvivalenciju tautologičnosti i univerzalne validnosti i koristiti Teorem 7 ograničen na S5.
Alternativni dokaz. Dokaz koji je upravo dan, kada je napisan detaljno, potpuno je konačan i strog. Ipak, može se tvrditi da naš dokaz trebamo dati u nekom poznatijem obliku, recimo analogno tretmanima obične tautologije Kalmarovom metodom u Rosseru [2],

(str. 70-74), i Kleene-u [1], (odjeljci 29, 30). Takav ćemo dokaz prikazati, iako detalji neće biti dati. Dokazujemo dvije leme. Prvo definirati karakteristiku formule u retku kao $P_1,..., P_m \wedge \sim Q_1 \wedge ... \sim Q_n$, gdje su $P_{x'}$ s ($Q_{x'}$ s) iskazne varijable kojima su **T**(**F**) dodijeljene zbog retka. Karakteristična formula tablice s naznačenim redom je $A_0 \wedge \Diamond A_1 \wedge ... \Diamond A_p \wedge \sim \Diamond B_1 \wedge ... \sim \Diamond B_q$, gdje je A_0 karakteristična formula označenog retka tablice, $A_1,..., A_p$ su karakteristične formule drugih redaka tablice, a $B_1,..., B_q$ su karakteristične formule redaka izostavljenih iz tablice. Neka je C karakteristična formula tablice s određenim redom i neka je D formula koju procjenjuje tabela. Prva lema je da ako određeni red dodijeli **T** (**F**) za D, $\vdash C \supset D$ ($\vdash C \supset \sim D$). (Posebno ako je D tautologija, $\vdash C \supset D$ za svako moguće C.) Ova lema se može dokazati indukcijom broja simbola u D. Druga lema je da je za bilo koju D alternaciju karakterističnih formula svih mogućih tabela s označenim redovima za D je teorem S5. Iz ove dvije leme lako slijedi kompletnost našeg teorema. Dio konzistencije dokazan je promatranjem da su svi aksiomi S5 tautologije i da R1 i R2 daju samo tautologije kada se primjenjuju na tautologije.[4]

Do sada nismo dopuštali kvantificiranje iskaznih varijabli. Sada definiramo sistem S5 iskaznim kvantifikatorima koji sadrže iskazne kvantifikatore i slijedeće sheme aksioma (osim onih iz S5):

(4) $(P)\ A\ (P) \supset A\ (Q)$, podmet uobičajeniih ograničenja supstitucije.

(5) $(P)\ (A\ (P) \supset (P))\ .\supset .\ (P)\ A\ (P) \supset (P)\ B\ (P)$.

(6) $A \supset (P)\ A$, ako P nije slobodno u A.

(7) $(\exists P_1),..., (\exists P_n)\ A$, gdje je A karakteristična formula S5 tabele istinosne vrijednosti s označenim redom (kao što je definirano u Teorem 8), i $P_1, ..., P_n$ su njegove slobodne iskazne varijable.

(7) uvelike je ojačana verzija B9 od [l]; čitatelj bi trebao provjeriti njenu vjerodostojnost stvarnim primjerima. Nadalje se slažemo da svaka univerzalna iskazna kvantifikacija aksioma je neki aksiom. Pravila zaključivanja su R1 i R2.

TEOREM 9. Neka je A formula S5 koja se ne može dokazati u S5 i neka $P_1,..., P_n$ su njezine slobodne iskazne varijable. Onda ako (P_1)

[4] U ranijim radovima detaljno sam izveo ovaj alternativni dokaz, prije nego što me je poznanstvo s Bethovim radom navelo na to da generaliziram tablice istinosne vrijednosti na semantičke tabele i teorem kompletnosti.

... (P_n) A se doda u S5 s iskaznim kvantifikatorima, dobijeni sistem je nekonzistentan.

DOKAZ. Budući da A nije dokazivo u S5, prema Teoremu 8 neka tabela istinosne vrijednosti sadrži redak u kojem je A dodijeljeno **F**. Neka je B karakteristična formula te tabele, s nekim **F** redom za A kao označenim redom. Prema prvoj lemi u alternativnom dokazu Teorema 8 (ili prema samom Teoremu 8), $\vdash B \supset \sim A$ u S5, zatim u S5 s iskaznim kvantifikatorima, $\vdash (P_1,..., P_n) (B \supset \sim A)$, i stoga $\vdash (\exists P_1)$ ... $(\exists P_n)$ $B \supset (\exists P_1)$ ... $(\exists P_n) \sim A$. Budući je $(\exists P_1)$ ... $(\exists P_n)$ B primjer sheme aksioma (7), imamo $\vdash (\exists P_1)$ ... $(\exists P_n) \sim A$ koje je suprotno (P_1) ... (P_n) A.

Teorem 9 je rezultat kompletnosti za S5 analogan Korolariju 2, str. 134, u Kleenea [7].[5]

Teorem 9 se može preformulirati kao tvrdnja da ako je formula A u S5 s iskaznim kvantifikatorima nedopustiva u tom sistemu, dodavanje zatvaranja A čini sistem nekonzistentnim, *sve dok A ne sadrži samo iskazne kvantifikatore*. [(*Dodano 19. decembra 1958*). Ograničenje u kurzivu može se ukloniti proširenjem konstrukcija tablice formulama s iskaznim kvantifikatorima. Na taj način mogli bismo dobiti teorem o kompletnosti za S5 s iskaznim kvantifikatorima. Detalji nisu navedeni ovdje.]

Teorem kompletnosti koji je dan u ovom radu temelji se na sistemu S5. Dobro je poznato da postoji mnogo alternativnih modalnih sistema; pet različitih sistema predloženo je samo u [1]. Nadalje, ako je modalna logika proširena priznavanjem kvantifikacije i identiteta, postoje i drugi kontroverzni zakoni kao što su $(x) \Box A (x) \supset \Box(x) A (x)$ i $(a, b) (a = b \supset \Box\, a = b)$. Neki od tih sistema, alternativa S5*=, dovode do alternativnih pojmova kompletnosti; i svaka njihova usporedba u pitanju "prihvatljivosti" može se temeljiti na ispitivanju ovih alternativnih semantičkih pojmova. Detalji takvih razmatranja pojavit će se u nastavku ovog rada.

---

[5] Alternativna formulacija teorema 9, koja izbjegava mehanizam propozicijskih kvantifikatora, može se dobiti u S5, s postuliranim zamjenskim pravilom za propozicijske varijable. U takvom sistemu dopuštamo da se sve formule oblika (7), s egzistencijalnim kvantifikatorima zamijene jednim negativnim znakom, postuliraju kao izravno odbacive (vidi [3]). Zatim je rezultirajući sistem kompletan, u smislu da je svaka formula ili dokaziva ili odbaciva; dakle, ako u sistem dodamo nedokazivu formulu, dobijamo nedosljednost u smislu [3].

BIBLIOGRAFIJA

[1] C. I. LEWIS and C. H. LANGFORD, ***Symbolic logic***, Century Company, 1932.
[2] J. B. ROSSER, ***Logic for mathematicians***, McGraw-Hill, 1953.
[3] RUDOLF CARNAP, ***Introduction to semantics***, Harvard University Press, 1942.
[4] E. W. BETH, ***Semantic entailment and formal derivabality***, Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd Letterkunde, Nieuwe Reeks, Deel 18, no. 13, 1955, pp. 309-342.
[5] W. V. QUINE, ***Three grades of modal involvement***, Proceedings of the Xith International Congress of Philosophy, Vol. XIV, pp. 65-81.
[6] A. N. PRIOR, ***Modality and quantification in S5***, this JOURNAL, Vol. 21 (1956), pp. 60-62.
[7] S. C. KLEENE, ***Introduction to metamathematics***, Van Nostrand, 1952.
[8] H. B. CURRY, ***A theory of formal deducibility***, Notre Dame Mathematical Lectures, no. 6, 1950.

Prijevod s engleskog: Nijaz Ibrulj